MATURZYSTO!

Część III – równania i nierówności kwadratowe, czyli równania i nierówności II stopnia z 1 niewiadomą.

Rozwiąż je samodzielnie, a potem, jeśli chcesz, sprawdź rozwiązania i porównaj wyniki.

POWODZENIA!

Zadania powtórzeniowe przygotowała:
mgr Dorota Nawrocka
nauczycielka matematyki
Zespołu Szkół Technicznych i Ogólnokształcących
we Wrześni.

Przypomnij sobie:

1. wzory skróconego mnożenia
2. rozkład wielomianu na czynniki liniowe
3. wzory na:
   1) wyróżnik trójmianu kwadratowego (deltę Δ)
   2) pierwiastki (x_1, x_2, x_0)

Zadania do rozwiązania:

1. $2x^2 - 4x = 0$
2. $x^2 - 9 = 0$
3. $3x^2 + 27 = 0$
4. $-3x^2 = 0$
5. $x^2 - 6x + 9 = 0$
6. $x^2 + 6x + 8 = 0$
7. $(3x-1)^2 + \left[-4(2-x)^2\right] = 0$
8. $-2x^2 - 2x - 2 \langle 0$
9. $x^2 + x - 6 \geq 0$
10. $2x^2 + 4x + 2 \leq 0$
11. $-\left(x^2 - 2x + 1\right) \rangle 0$
12. $16x^2 - 8 \leq 0$
13. $|x| + |x+1| = 2x^2$
14. $\left|x^2 - 4\right| + |x| \geq 2$

ZADANIE 1

$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x-2) = 0$$
$$2x = 0 \text{ lub } x - 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 2$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest $x \in \{0,2\}$

ZADANIE 2

$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x-3)(x+3) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 3 = 0$$
$$x = 3 \quad \text{lub} \qquad x = -3$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest $x \in \{-3, 3\}$

ZADANIE 3

$$3x^2 + 27 = 0 \,/ : 3$$
$$x^2 + 9 = 0$$

$\underline{x^2 = -9}$ brak rozwiązania, gdyż nie istnieje taka liczba, której kwadrat = liczbie ujemnej

---

ZADANIE 4

$$-3x^2 = 0 \,/ : (-3)$$
$$x^2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{x = 0}$$

pierwiastek dwukrotny (podwójny)

Odp. Rozwiązaniem równania jest x=0.

ZADANIE 5

$$x^2-6x+9=0$$
$$a=1 \quad b=-6 \quad c=9$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=36-4\cdot 1\cdot 9$$
$$\Delta=36-36=0$$
$$\sqrt{\Delta}=0$$
$$x_0=\frac{-b}{2a}$$
$$x_0=\frac{6}{2}=\underline{3}$$

pierwiastek dwukrotny

Odp. Rozwiązaniem równania jest x=3.

ZADANIE 6

$$x^2+6x+8=0$$
$$a=1$$
$$b=6$$
$$c=8$$
$$\Delta=b^2-4ac=36-4\cdot 1\cdot 8=36-32=\underline{4}$$
$$\sqrt{\Delta}=2$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-2}{2}=\frac{-8}{2}=\underline{-4}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+2}{2}=\frac{-4}{2}=\underline{-2}$$

Odp. Rozwiązaniem równania są $x_1=-4$ lub $x_2=-2$.

ZADANIE 7

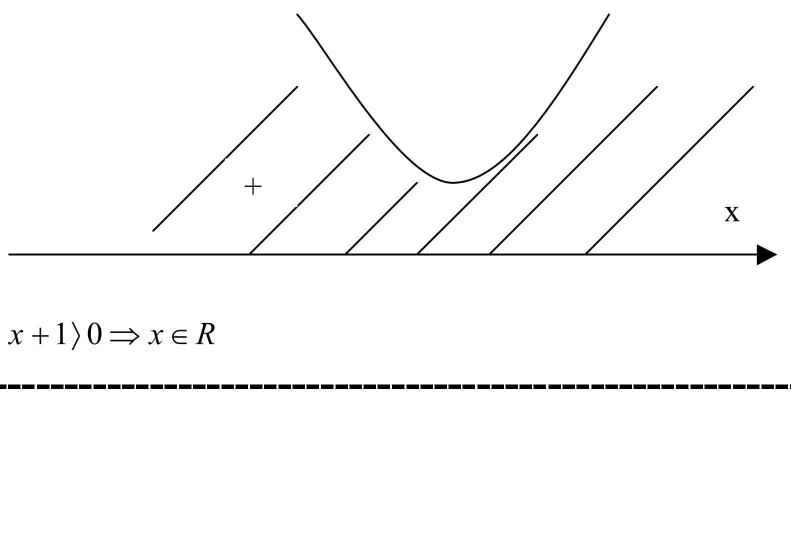
$$(3x-1)^2+\left[-4(2-x)^2\right]=0$$
$$9x^2-6x+1+\left[-4\left(4-4x+x^2\right)\right]=0$$
$$9x^2-6x+1-16+16x-4x^2=0$$
$$5x^2+10x-15=0\,/:5$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$a=1$$
$$b=2$$
$$c=-3$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=4-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=\underline{16}$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-4}{2}=-3$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+4}{2}=1$$

Odp. $\underline{x_1=-3}$ lub $\underline{x_2=1}$

ZADANIE 8

$$-2x^2-2x-2\langle 0\,/:(-2)$$
$$x^2+x+1\rangle 0$$
$a=1$ $b=1$ $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot1=-3$
$\Delta=-3\langle 0\Rightarrow$ brak pierwiastków



Odp.

$x^2+x+1\rangle 0\Rightarrow x\in R$

ZADANIE 9

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

$a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = -6$

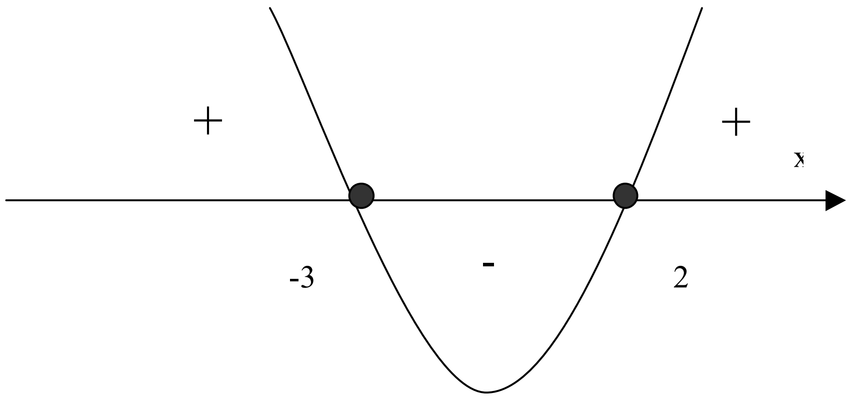
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = \underline{25}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{2} = \underline{-3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a2} = \frac{-1 + 5}{2} = \underline{2}$$



Odp. $x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

ZADANIE 10

$2x^2 + 4x + 2 \leq 0 / : 2$

$x^2 + 2x + 1 \leq 0$

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 0$

$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$x_0 = \dfrac{-2}{2} = -1$

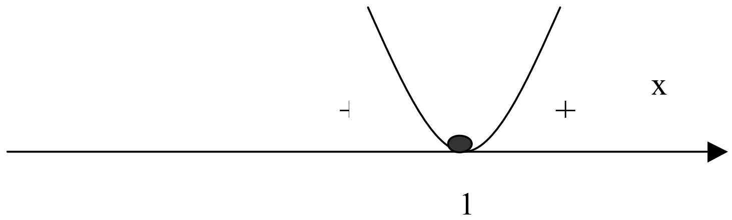
pierwiastek dwukrotny (podwójny)

lub

$2(x+1)^2 \leq 0$

$x = -1$

pierw. dwukrotny



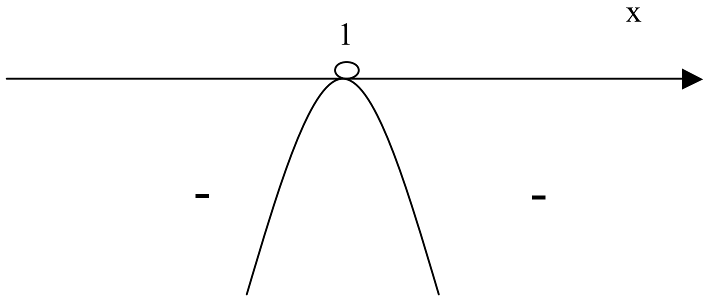
Odp. $x^2+2x+1\le 0 \Leftrightarrow x=-1$

ZADANIE 11

$$-\left(x^2-2x+1\right)\rangle 0$$
$$-x^2+2x-1\rangle 0$$
$$a=-1$$
$$b=2$$
$$c=-1$$
$$\Delta=b^2-4ac=4-4(-1)(-1)=4-4=\underline{0}$$
$$x_0=\frac{-b}{2a}$$
$$x_0=\frac{-2}{-2}=1$$

lub
$$-(x-1)^2\rangle 0$$
$$x=1$$
pierw. dwukrotny

pierwiastek dwukrotny (podwójny)



Odp. $-x^2+2x-1\rangle 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

ZADANIE 12

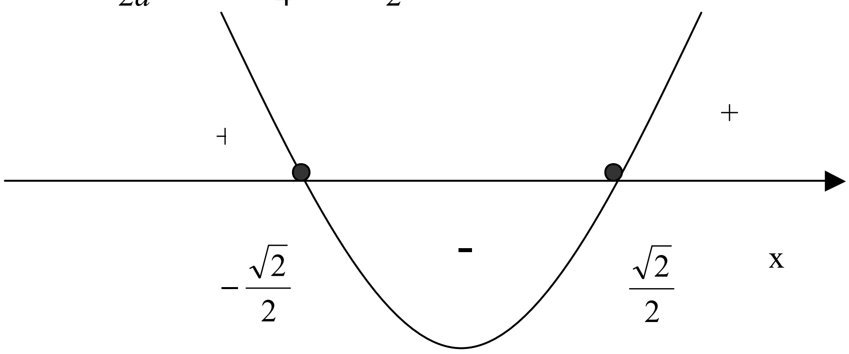
$$16x^2 - 8 \le 0 \,/ : 8$$
$$2x^2 - 1 \le 0$$
$a = 2 \qquad b = 0 \qquad c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = \underline{8}$

$\Delta = 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

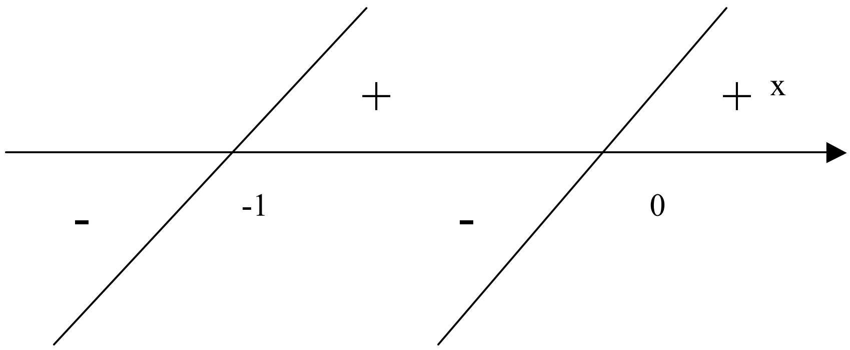
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0+2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Odp. $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

ZADANIE 13

$$|x| + |x+1| = 2x^2$$
$x = 0 \qquad x = -1$



Równanie rozwiązujemy w trzech przedziałach:

1. $x \in (-\infty. -1)$
2. $x \in [-1{,}0)$
3. $x \in [0, \infty)$

Ad.1. $\underline{x \in (-\infty,-1)}$

$$|x| + |x+1| = 2x^2$$
$$- \qquad -$$
$$-x - x - 1 = 2x^2$$
$$-2x - 1 = 2x^2$$
$$-2x^2 - 2x - 1 = 0 \,/ : (-1)$$
$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$a = 2 \qquad b = 2 \qquad c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4 \langle 0$$

$\Delta \langle 0 \Rightarrow$ brak pierwiastków

1) Brak rozwiązania w przedziale $\underline{(-\infty,-1)}$

Ad.2. $\underline{x \in [-1{,}0)}$

$|x| + |x+1| = 2x^2$

$-\qquad +$

$-x + x + 1 = 2x^2$

$2x^2 - 1 = 0$

$a = 2 \qquad b = 0 \qquad c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0-2\sqrt{2}}{-4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0+2\sqrt{2}}{-4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin [-1,0)$ nie jest więc rozwiązaniem

$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1,0)$ jest rozwiązaniem w przedziale

2) Pierwszym rozwiązaniem jest $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ad.3 $x \in [0,\infty)$

$|x| + |x+1| = 2x^2$

$+\qquad +$

$x + x + 1 = 2x^2$

$-2x^2 + 2x + 1 = 0$

$a = -2$

$b = 2$

$c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-2)1 = 4 + 8 = 12$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \in [0,\infty)$$ jest rozwiązaniem w przedziale

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{-4} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \notin [0,\infty)$$ nie jest więc rozwiązaniem

3) Drugim rozwiązaniem jest $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Zestawienie wyników- odpowiedź końcowa:

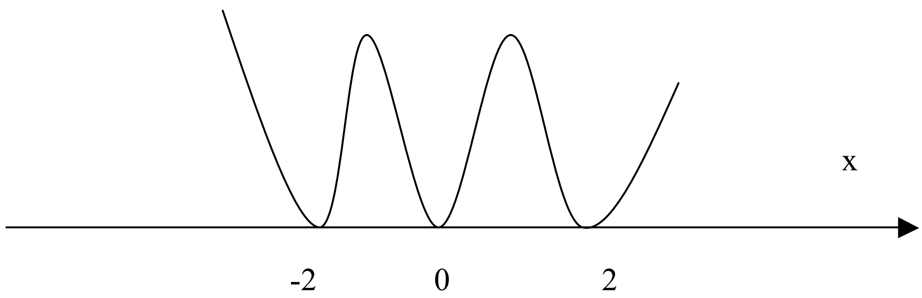
Odp. Rozwiązaniem równania jest $\underline{x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}}$

--

ZADANIE 14

$$|x^2 - 4| + |x| \geq 2$$

$x = 2$ lub $x = -2$, $x = 0$



Nierówność rozwiązujemy w czterech przedziałach:

1. $x \in (-\infty, -2)$
2. $x \in [-2, 0)$
3. $x \in [0, 2)$
4. $x \in [2, \infty)$

<u>Ad. 1. $x \in (-\infty, -2)$</u>

$$|x^2 - 4| + |x| \geq 2$$

$$+ \qquad -$$

$$x^2 - 4 - x \geq 2$$

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

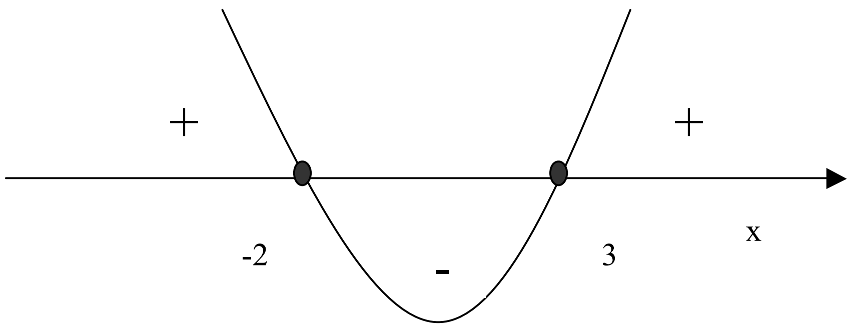
$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = \underline{25}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = \underline{-2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1+5}{2} = \underline{3}$$

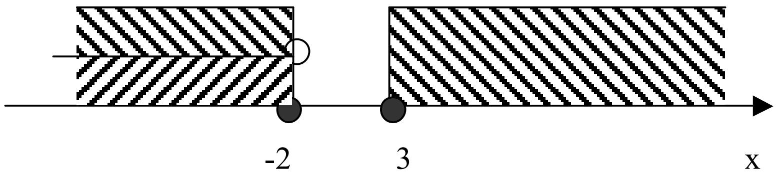


<u>Rozwiązanie 1)</u> $\quad \underline{x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)}$

Zestawienie (iloczyn przedziału 1 z rozwiązaniem 1) :

$x \in (-\infty, -2) \quad i \quad x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty) \quad czyli$

$x \in (-\infty, -2) \cap ((-\infty, -2] \cup [3, \infty)) \quad zatem \quad \Downarrow$



1) Odp. $x \in (-\infty, -2)$

Ad. 2. $x \in [-2, 0)$

$|x^2 - 4| + |x| \geq 2$

$\;\;-\qquad\;\; -$

$-x^2 + 4 - x \geq 2$

$-x^2 - x + 2 \geq 0$

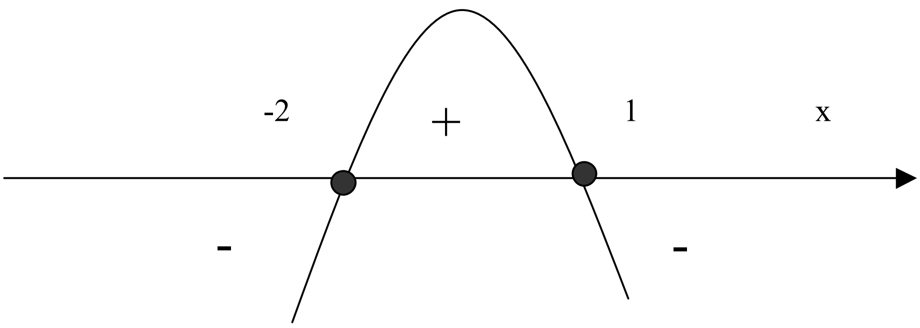
$a = -1 \qquad b = -1 \qquad c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - 3}{-2} = 1$

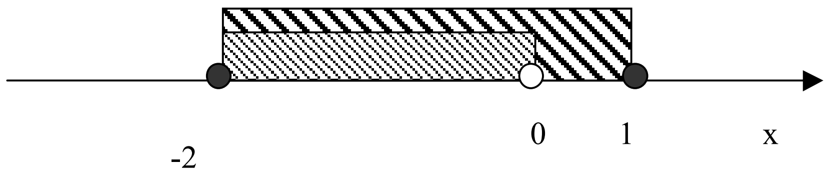
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 3}{-2} = -2$



Rozwiązanie 2) $x \in [-2, 1]$

Zestawienie (iloczyn przedziału 2 z rozwiązaniem 2)

$x \in [-2,0)\ \ i\ \ x \in [-2,1]\ czyli$
$x \in [-2,0) \cap [-2,1]$



2) Odp. $\underline{x \in [-2,0)}$

Ad. 3. $\underline{x \in [0,2)}$

$|x^2 - 4| + |x| \geq 2$

$\quad - \qquad +$

$-x^2 + 4 + x \geq 2$
$-x^2 + x + 2 \geq 0$

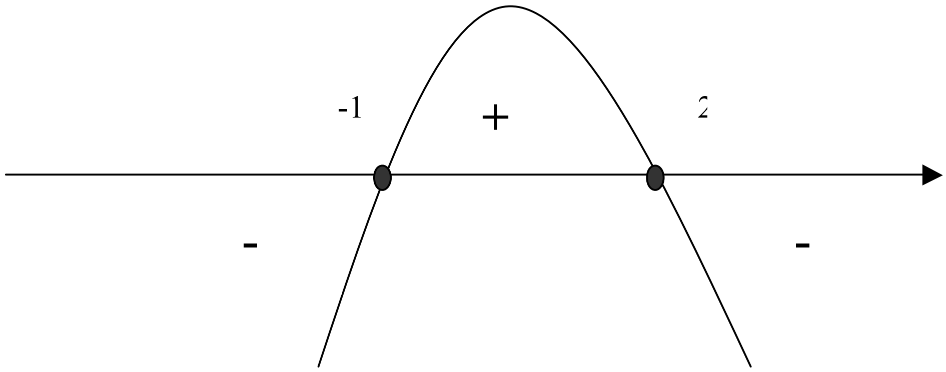
$a = -1 \qquad b = 1 \qquad c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = \underline{9}$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{-2} = \underline{2}$$

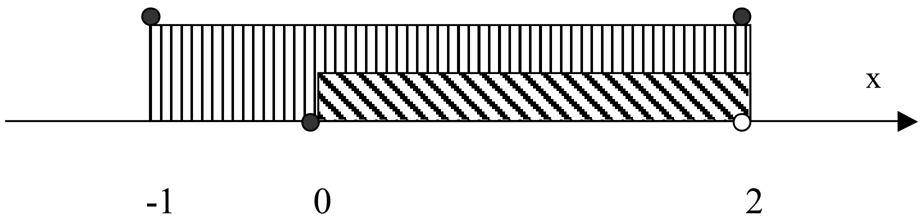
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{-2} = \underline{-1}$$



Rozwiązanie 3) $\underline{x \in [-1, 2]}$

Zestawienie (iloczyn przedziału 3 z rozwiązaniem 3)

$x \in [0, 2) \cap [-1, 2]$



3) Odp. $\underline{x \in [0, 2)}$

Ad. 4. $\underline{x \in [2, \infty)}$

$$|x^2 - 4| + |x| \geq 2$$

$$\quad + \qquad +$$

$$x^2 - 4 + x \geq 2$$

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

$$a = 1$$

$$b = 1$$

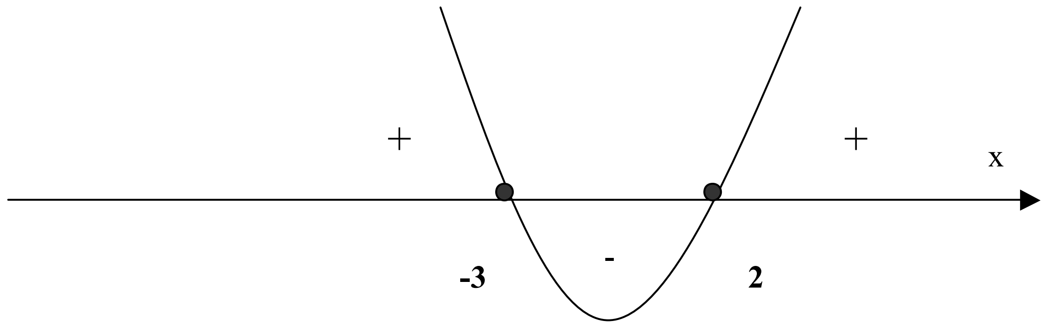
$$c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = \underline{25}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2} = \underline{-3}$$

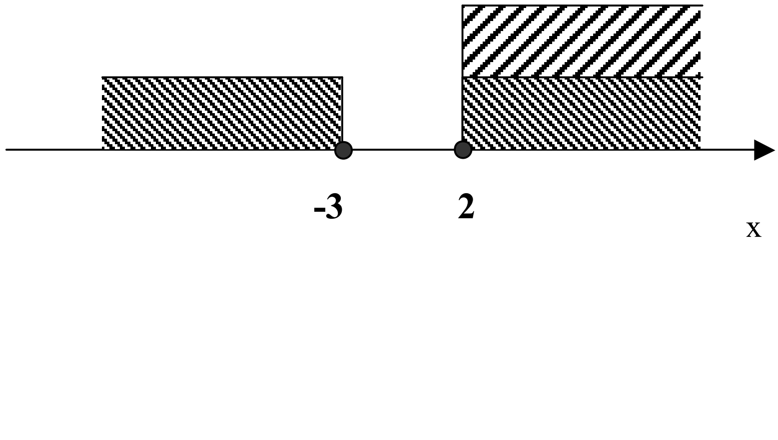
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2} = \underline{2}$$



Rozwiązanie 4) $\underline{x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)}$

Zestawienie (iloczyn przedziału 4 z rozwiązaniem 4)

$$x \in [2, \infty) \cap ((-\infty, -3] \cup [2, \infty))$$



4) Odp.	$\underline{x \in [2, \infty)}$

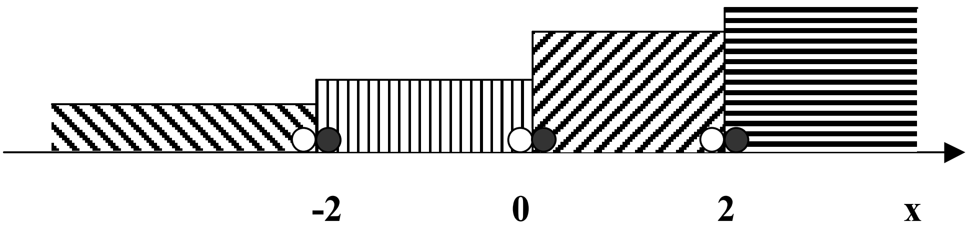
Zestawienie odpowiedzi 1, 2, 3, 4 (suma rozwiązań)

1. $x \in (-\infty, -2)$

2. $x \in [-2, 0)$

3. $x \in [0, 2)$

4. $x \in [2, \infty)$



Odpowiedź końcowa:

$x \in (-\infty, -2) \cup [-2, 0) \cup [0, 2) \cup [2, \infty)$

$\underline{Czyli \;\; x \in (-\infty, \infty) \;\; czyli \;\; x \in R}$